ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2020**

CONCOURS *INTERNE* POUR LE RECRUTEMENT :

- **d'INGÉNIEURS DES ÉTUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE (I.E.E.A.C)**

&

- **d'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AERIENNE (I.C.N.A)**

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

IEEAC : Coefficient : 4

ICNA : Coefficient : 2

Cette épreuve comporte :

1 page de garde (recto)
1 page d'instruction (recto)
4 pages de sujet numérotées de 1 à 4 (recto-verso)

TOUT DISPOSITIF ELECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)

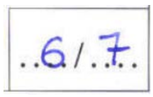
ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHEMATIQUES

1) Vous devez composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille ou feutre à encre foncée bleue ou noire.

2) Les effaceurs correcteurs (comme le tippex) sont interdits car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.

3) Numéroter chaque page de composition pour faciliter la correction de la copie (il n'est pas nécessaire de numéroter les pages entièrement blanches) dans la zone prévue en bas à droite de chaque copie.

   Par exemple, pour la 6^{e} page d'une copie comportant 7 pages de composition et une page blanche, numéroter ainsi la page 6 sur 7 :



4) Vous devez composer uniquement sur les supports de composition officiels pour l'épreuve.

5) Aucun brouillon ne sera ramassé.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Le problème traite de la transformation d'Abel et de ses applications. Les parties deux et trois sont indépendantes entre elles et ne dépendent de la première partie qu'à travers la question 1.a.

Première partie
Transformation d'Abel et Théorème d'Abel

1. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles à partir desquelles on définit une troisième suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ par :

$$u_n = a_n b_n \text{ pour tout entier } n \geq n_0 .$$

Enfin, pour $n \geq n_0$, on pose :

$$B_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k \text{ et } S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k .$$

a) La transformation d'Abel consiste à exprimer la somme partielle S_n à l'aide des B_k : montrer que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k + a_{n+1}B_n .$$

b) On suppose de plus que :

(H1) La suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0,

(H2) La série $\sum_{n\geq n_0}(a_{n+1} - a_n)$ converge absolument,

(H3) La suite $(B_n)_{n\geq n_0}$ est bornée.

En déduire que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (ce résultat constitue le Théorème d'Abel).

2. Première application.

a) À l'aide d'un théorème du cours, justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$.

b) Retrouver la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ à l'aide du résultat de la question 1.b.

3. Seconde application.

a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$. En utilisant les nombres complexes, montrer que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$X_n(\theta) = \frac{\cos(\frac{n\theta}{2})\sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} .$$

Que vaut $X_n(\theta)$ lorsque $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$?

b) Établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2n)}{n}$.

c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^2(n)}{n}$?

Deuxième partie

Convergence d'une série numérique

Dans cette partie α et β désignent des réels strictement positifs tels que :

$$\alpha \in]0,1[\, , \ \beta > \max\{\alpha, 1-\alpha\} \, .$$

On se propose de montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin(n^{\alpha})}{n^{\beta}}$.

4. Montrer que, si $\beta > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin(n^{\alpha})}{n^{\beta}}$ converge.

5. On pose $f : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R} \, , \ x \mapsto f(x) = \sin(x^{\alpha})$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$. Est-elle dérivable en 0 ?

b) Établir que, pour tout entier $k \geq 2$ et pour tout $x \in [k-1, k]$,

$$| f(x) - f(k) | \leq \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} \, .$$

c) Justifier également que $\int_0^1 | f(x) - f(1) | dx \leq \int_0^1 \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} \, dx$.

d) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^n f(x) dx - \sum_{k=1}^{n} \sin(k^{\alpha}) \right| \leq n^{\alpha} \, .$$

6. À l'aide du changement de variable $y = x^{\alpha}$ puis d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left| \int_0^n f(x) dx \right| \leq \frac{2}{\alpha} n^{1-\alpha} \, .$$

7. Pour $n \geq 1$, indiquer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\frac{1}{n^{\beta}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta}}$.

8. Déduire de ce qui précède et de la transformation d'Abel (cf. 1.a) la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\sin(n^{\alpha})}{n^{\beta}}$.

Troisième partie

Transformation d'Abel et série entière

Soit $(c_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge. Pour tout $N \geq 0$, on pose :

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} c_k \, .$$

9. Rappeler la (une) définition du rayon de convergence d'une série entière. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$?

10. On pose $F : [0,1] \to \mathbb{R} \, , \ t \mapsto F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ et pour $n, N \in \mathbb{N}$ tels que $n > N$,

$$R_N^{(n)} = \sum_{k=N+1}^{n} c_k \, .$$

On se propose de montrer que F est continue sur $[0,1]$.

a) Établir que, pour $n > N \geq 0$ et $t \in [0,1]$,

$$\sum_{k=N+1}^{n} c_k t^k = \sum_{k=N+1}^{n} (t^k - t^{k+1}) R_N^{(k)} + t^{n+1} R_N^{(n)} \, .$$

b) Pour tout $N \geq 0$, justifier l'existence de $\delta_N = \sup\{ | R_N^{(n)} | \, ; n \geq N+1 \}$. Pour $t \in [0,1]$, simplifier l'expression $\sum_{k=N+1}^{n} (t^k - t^{k+1})$ puis montrer que :

$$\left| \sum_{k=N+1}^{n} c_k t^k \right| \leq \delta_N .$$

En déduire que pour tout $t \in [0,1]$:

$$| F(t) - F_N(t) | \leq \delta_N \text{ où on a posé } F_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k t^k .$$

c) En revenant à la définition de la limite et en remarquant que $R_N^{(n)} = R_N - R_n$, montrer que $\lim_{N \to +\infty} \delta_N = 0$.

d) Rappeler le théorème permettant de montrer la continuité d'une série de fonctions sur un intervalle puis conclure.

11. Application. Préciser le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ ainsi que l'intervalle sur lequel ce développement est valide. En déduire la valeur $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

PROBLÈME 2

Pseudo-solutions d'une équation linéaire

On note E et F deux espaces vectoriels euclidiens munis respectivement des produits scalaires $(\cdot|\cdot)_E$ et $(\cdot|\cdot)_F$, $f : E \to F$ une application linéaire et b un vecteur de F.

On considère l'équation linéaire d'inconnue $x \in E$:

$$(e) \quad f(x) = b .$$

On rappelle qu'une équation linéaire est dite *compatible* lorsqu'elle admet au moins une solution.

On appelle *pseudo-solution* de (e), tout vecteur $x' \in E$ tel que $f(x') = p(b)$ où $p : F \to F$ désigne la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$.

Première partie
Étude d'un exemple

On considère dans cette partie le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ sont munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs et où f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ est défini par : $b = (\frac{9}{10}, \frac{2}{10}, \frac{11}{10})$.

1. Déterminer le rang de f puis une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$.

2. a) L'équation (e) est-elle compatible ?

b) Calculer $p(b)$ puis déterminer la ou les pseudo-solutions de (e).

Deuxième partie
Étude du cas général

3. a) Montrer que (e) admet au moins une pseudo-solution. À quelle condition portant sur f cette pseudo-solution est-elle unique ?

b) Montrer que si l'équation (e) est compatible, alors toute pseudo-solution de (e) est solution de (e).

c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $x' \in E$ est une pseudo-solution de (e),

(ii) $\| f(x') - b \|_F = \min\{\| f(x) - b \|_F \; ; x \in E\}$.

La notation $\| \cdot \|_F$ désigne la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)_F$.

4. On désigne par A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ où $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) est une base orthonormée de E (resp. F). On définit alors l'application $g : F \to E$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est la transposée de A notée ${}^tA$.

a) Montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a : $(f(x)|y)_F = (x|g(y))_E$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

c) Montrer alors que $g(b) = g \circ p(b)$.

5. Pour $x' \in E$, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) x' est une pseudo-solution de (e),

(2) $g \circ f(x') = g(b)$.

6. Application. On reprend l'exemple traité dans la première partie.

En exploitant la question 5, écrire le système linéaire que satisfait une pseudo-solution de (e) puis résoudre ce système et retrouver ainsi le résultat de la question 2.b).

Troisième partie
Quelques propriétés de $g \circ f$

7. a) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise $g \circ f$.

b) Montrer que les valeurs propres de $g \circ f$ sont positives ou nulles.

8. Établir que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$ et que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

9. On pose $n = \dim E$ (avec $n \geq 1$). On note $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E qui diagonalise $g \circ f$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (pas nécessairement distinctes) numérotées de sorte que : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

a) On suppose que $\operatorname{rg}(f) = n$. Montrer que toutes les valeurs propres de $g \circ f$ sont strictement positives puis établir que (e) admet une unique pseudo-solution x' donnée par :

$$x' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} (f(v_i)|b)_F \, v_i \, .$$

b) On suppose que $\operatorname{rg}(f) = r \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que les pseudo-solutions de (e) sont les vecteurs x' de la forme suivante :

$$x' = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\lambda_i} (f(v_i)|b)_F \, v_i + h \quad \text{où} \quad h \in \operatorname{Ker}(f) \, .$$

FIN DE L'ÉNONCÉ